

Università degli Studi 'La Sapienza'

Facoltà di Economia

Anno accademico 2012 - 13

Matematica Finanziaria

Canale D - K

Capitolo 4

Costituzione di capitali

Antonio Annibali

Capitolo 4 – Costituzione di capitali

4.1 – Concetti di base

Per costituzione di un capitale si intende quel procedimento in base al quale un soggetto detto **risparmiatore** versa determinati importi a determinate scadenze per poter ottenere ad un tempo finale una somma D_n (importo del capitale) finanziariamente equivalente alla somme versate.

Tale procedimento di costituzione è denominato *progressivo* e, considerato nel regime finanziario uniforme della capitalizzazione composta, risulta caratterizzato dalle seguenti grandezze:

- **Importo del capitale da costituire** D_n
- **Durata dell'operazione** n
- **Rate di costituzione** $\sum_{k=1}^n R_k$
- **Quote capitale** $\sum_{k=1}^n C_k$
- **Quote interesse** $\sum_{k=1}^n I_k$
- **Capitali costituiti** $\sum_{k=1}^n D_k$

e dalle seguenti relazioni tra le diverse grandezze finanziarie:

- *Condizioni di equilibrio del processo di ammortamento (capitale finale)*

$$D_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^n C_k \\ \sum_{k=1}^n R_k (1+i)^{n-k} = \sum_{k=1}^n R_k r^{n-k} \end{cases}$$

- *Capitali costituiti*

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n D_k &= \begin{cases} \sum_{h=1}^k C_h \\ \sum_{h=1}^k R_h r^{k-h} \end{cases} \\ D_0 &= 0 \end{aligned}$$

- *Quote interessi*

$$\prod_{k=1}^n I_k = i D_{k-1} = \begin{cases} i \sum_{h=1}^{k-1} C_h \\ i \sum_{h=1}^{k-1} R_h r^{k-1-h} \end{cases}$$

- *Rate di costituzione*

$$\prod_{k=1}^n R_k = C_k - I_k = C_k - i D_{k-1}$$

$$\prod_{k=1}^n C_k = R_k + I_k = R_k + i D_{k-1}$$

4.2 – Costituzione con quote capitali prefissate

$$\begin{array}{l} \boxed{\sum_{k=1}^n C_k = D_n} \\ \boxed{\sum_{k=1}^n D_k = D_{k-1} + C_k \dots = \sum_{h=1}^k C_h} \\ \boxed{\sum_{k=1}^n I_k = i D_{k-1} \dots = i \sum_{h=1}^{k-1} C_h} \\ \boxed{\sum_{k=1}^n R_k = C_k - I_k \dots = C_k - i \sum_{h=1}^{k-1} C_h} \end{array}$$

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0				$D_0 = 0$
1	C_1	$I_1 = i D_0$	$R_1 = C_1 - I_1$	$D_1 = D_0 + C_1$
2	C_2	$I_2 = i D_1$	$R_2 = C_2 - I_2$	$D_2 = D_1 + C_2$
...
k	C_k	$I_k = i D_{k-1}$	$R_k = C_k - I_k$	$D_k = D_{k-1} + C_k$
...
n	C_n	$I_n = i D_{n-1}$	$R_n = C_n - I_n$	$D_n = D_{n-1} + C_n$

- Costituzione di tipo italiano

(con quote capitale costanti e rate in progressione aritmetica)

$$\begin{array}{l} \boxed{\sum_{k=1}^n C_k = \frac{D_n}{n}} \\ \boxed{\sum_{k=1}^n C_k = n \frac{D_n}{n} = D_n} \\ \boxed{\sum_{k=1}^n D_k = D_{k-1} + C \dots = kC = \frac{k}{n} D_0} \\ \boxed{\sum_{k=1}^n I_k = (k-1)iC, \quad \sum_{k=2}^n I_k = I_{k-1} + iC} \\ \boxed{\sum_{k=1}^n R_k = (1 + (k-1)i)C, \quad \sum_{k=2}^n R_k = R_{k-1} + iC} \end{array}$$

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0				$D_0 = 0$
1	$C_1 = C$	$I_1 = 0C$	$R_1 = C$	$D_1 = C$
2	$C_2 = C$	$I_2 = iC$	$R_2 = (1+i)C$	$D_2 = 2C$
...
k	$C_k = C$	$I_k = (k-1)iC$	$R_k = (1+(k-1)i)C$	$D_k = kC$
...
n	$C_n = C$	$I_n = (n-1)iC$	$R_n = (1+(n-1)i)C$	D_n

4.3 – Costituzione con rate prefissate

$\sum_{k=1}^n R_k v^{n-k} = D_n$	$\sum_{k=1}^n D_k = r D_{k-1} + R_k \dots = \sum_{h=1}^k R_h r^{k-h}$
	$\sum_{k=1}^n I_k = i D_{k-1} \dots = i \sum_{h=1}^{k-1} R_h r^{k-1-h}$
	$\sum_{k=1}^n C_k = R_k + I_k \dots = C_k + i \sum_{h=1}^{k-1} R_h r^{k-1-h}$

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0				$D_0 = 0$
1	$C_1 = R_1 + I_1$	$I_1 = 0$	R_1	$D_1 = D_0 + C_1$
2	$C_2 = R_2 + I_2$	$I_2 = iD_1$	R_2	$D_2 = D_1 + C_2$
...
k	$C_k = R_k + I_k$	$I_k = iD_{k-1}$	R_k	$D_k = D_{k-1} + C_k$
...
n	$C_n = R_n + I_n$	$I_n = iD_{n-1}$	R_n	$D_n = D_{n-1} + C_n$

- **Costituzione di tipo francese**

(con rate costanti e quote capitale in progressione geometrica)

$$\sum_{k=1}^n R_k = \frac{D_n}{s_{\overline{n}|i}}$$

$$\sum_{k=1}^n R_k r^{n-k} = \frac{D_0}{s_{\overline{n}|i}} = D_n$$

$$\sum_{k=1}^n D_k = r D_{k-1} + R \dots = R \frac{s_{\overline{k}|i}}{s_{\overline{n}|i}}$$

$$\sum_{k=1}^n I_k = i R s_{\overline{k-1}|i} = R(r^{k-1} - 1), \quad \sum_{k=2}^n I_k = I_{k-1} + C_{k-1} i$$

$$\sum_{k=1}^n C_k = R r^{k-1} = \frac{D_0}{s_{\overline{n}|i}} r^{k-1}, \quad \sum_{k=2}^n C_k = C_{k-1} v$$

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0				D_0
1	$C_1 = R$	$I_1 = R 0$	$R_1 = R$	$D_1 = R s_{\overline{1} i}$
2	$C_2 = Rr$	$I_2 = R(r-1)$	$R_2 = R$	$D_2 = R s_{\overline{2} i}$
...
k	$C_k = Rr^{k-1}$	$I_k = R(r^{k-1} - 1)$	$R_k = R$	$D_k = R s_{\overline{k} i}$
...
n	$C_n = Rr^{n-1}$	$I_n = R(r^{n-1} - 1)$	$R_n = R$	$D_n = R s_{\overline{n} i}$

Esercizio

Dato un capitale da costituire M (es. 1000) al tempo iniziale 5, costruire i piani di costituzione relativamente ad una durata pari a T ($=5$) e ad un tasso effettivo annuo d'interesse i (es. 6%), nei diversi casi sotto indicati:

- **Caso 1: Costituzione con quote capitali prefissate** (300, 100, 0, 400, ?)

$$C_n = D_n - \sum_{k=1}^{n-1} C_k = 1000 - (300 + 100 + 0 + 400) = 200$$

▲	AA	AB	AC	AD	AE
2	Anni	Capit	Inter	Rata	Residuo
3	0				0.00
4	1	300.00	0.00	300.00	300.00
5	2	100.00	18.00	82.00	400.00
6	3	0.00	24.00	-24.00	400.00
7	4	400.00	24.00	376.00	800.00
8	5	200.00	48.00	152.00	1000.00
9		1000.00	114.00	886.00	

▲	AA	AB	AC	AD	AE
2	Anni	Capit	Inter	Rata	Residuo
3	0				=AB\$1
4	=AA3+1	300	=AE3*\$B\$3	=AB4-AC4	=AE3+AB4
5	=AA4+1	100	=AE4*\$B\$3	=AB5-AC5	=AE4+AB5
6	=AA5+1	0	=AE5*\$B\$3	=AB6-AC6	=AE5+AB6
7	=AA6+1	400	=AE6*\$B\$3	=AB7-AC7	=AE6+AB7
8	=AA7+1	=B1-SOMMA(AB4:AB7)	=AE7*\$B\$3	=AB8-AC8	=AE7+AB8
9		=SOMMA(AB4:AB8)	=SOMMA(AC4:AC8)	=SOMMA(AD4:AD8)	

- **Caso 3: Costituzione di tipo italiano**

$$\sum_{k=1}^n C_k = C = \frac{D_n}{n} = \frac{1000}{5} = 200$$

▲	AA	AB	AC	AD	AE
22	Anni	Capit	Inter	Rata	Residuo
23	0				0.00
24	1	200.00	0.00	200.00	200.00
25	2	200.00	12.00	188.00	400.00
26	3	200.00	24.00	176.00	600.00
27	4	200.00	36.00	164.00	800.00
28	5	200.00	48.00	152.00	1000.00
29		1000.00	120.00	880.00	

	AA	AB	AC	AD	AE
	Anni	Capit	Inter	Rata	Residuo
22					
23	0				=AB\$1
24	=AA23+1	=B1/B2	=AE23*\$B\$3	=AB24-AC24	=AE23+AB24
25	=AA24+1	=AB24	=AE24*\$B\$3	=AB25-AC25	=AE24+AB25
26	=AA25+1	=AB25	=AE25*\$B\$3	=AB26-AC26	=AE25+AB26
27	=AA26+1	=AB26	=AE26*\$B\$3	=AB27-AC27	=AE26+AB27
28	=AA27+1	=AB27	=AE27*\$B\$3	=AB28-AC28	=AE27+AB28
29		=SOMMA(AB24:AB28)	=SOMMA(AC24:AC28)	=SOMMA(AD24:AD28)	

- **Caso 4: Costituzione con rate prefissate (250, 180, 0, 400, ?)**

$$R_n = D_n - \sum_{k=1}^{n-1} R_k r^{n-k} = 1000 - (250r^4 + 180r^3 + 400r), \quad R_n = D_n - D_{n-1}r$$

$$R_n = 1000 - (250r^4 + 180r^3 + 400r) = 46.00 \dots = 1000 - 900r$$

	AA	AB	AC	AD	AE
	Anni	Capit	Inter	Rata	Residuo
32					
33	0				0.00
34	1	250.00	0.00	250.00	250.00
35	2	195.00	15.00	180.00	445.00
36	3	26.70	26.70	0.00	471.70
37	4	428.30	28.30	400.00	900.00
38	5	100.00	54.00	46.00	1000.00
39		1000.00	124.00	876.00	

	AA	AB	AC	AD	AE
	Anni	Capit	Inter	Rata	Residuo
32					
33	0				=AB\$1
34	=AA33+1	=AD34+AC34	=AE33*\$B\$3	250	=AE33+AB34
35	=AA34+1	=AD35+AC35	=AE34*\$B\$3	180	=AE34+AB35
36	=AA35+1	=AD36+AC36	=AE35*\$B\$3	0	=AE35+AB36
37	=AA36+1	=AD37+AC37	=AE36*\$B\$3	400	=AE36+AB37
38	=AA37+1	=AD38+AC38	=AE37*\$B\$3	=B1-AE37*(1+B3)	=AE37+AB38
39		=SOMMA(AB34:AB38)	=SOMMA(AC34:AC38)	=SOMMA(AD34:AD38)	

- **Caso 5: Costituzione di tipo francese**

$$\sum_{k=1}^n R_k = R = \frac{D_n}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1000}{s_{\overline{5}|0.06}} = 177.40$$

	AA	AB	AC	AD	AE
42	Anni	Capit	Inter	Rata	Residuo
43	0				0.00
44	1	177.40	0.00	177.40	177.40
45	2	188.04	10.64	177.40	365.44
46	3	199.32	21.93	177.40	564.76
47	4	211.28	33.89	177.40	776.04
48	5	223.96	46.56	177.40	1000.00
49		1000.00	113.02	886.98	

	AA	AB	AC	AD	AE
42	Anni	Capit	Inter	Rata	Residuo
43	0				=AB\$1
44	=AA43+1	=AD44+AC44	=AE43*\$B\$3	=B1*B3/((1+B3)^B2-1)	=AE43+AB44
45	=AA44+1	=AD45+AC45	=AE44*\$B\$3	=AD44	=AE44+AB45
46	=AA45+1	=AD46+AC46	=AE45*\$B\$3	=AD45	=AE45+AB46
47	=AA46+1	=AD47+AC47	=AE46*\$B\$3	=AD46	=AE46+AB47
48	=AA47+1	=AD48+AC48	=AE47*\$B\$3	=AD47	=AE47+AB48
49		=SOMMA(AB44:AB48)	=SOMMA(AC44:AC48)	=SOMMA(AD44:AD48)	

